(Επανάληψη Πιθανοτήτων) ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΑΡΑ 5.

1) Εάν υποθέσουμε ότι όλες οι $\binom{52}{5}$ μοιρασιές σε ένα παιχνίδι πόκερ είναι ισοπίθανες, τότε ποια η πιθανότητα να έχουμε μοιρασιά:

α. Ένα «Ζεύγος»; (ααβγδ)

β. Ένα «φουλ»; (αααββ)

γ. Ένα «καρέ»; (ααααβ)

δ. Ένα «φλος»; (5 διαδοχικές κάρτες ίδιου χρώματος)

ε. Μια «κέντα»; (5 διαδοχικές κάρτες διαφορ. χρώματος).

ΛΥΣΗ

ΦΥΛΛΑ	ΧΡΩΜΑ-ΕΙΔΟΣ	13
$\boxed{52}$	→ Κούπα	→ A, 2, ..., K
	→ Σπαθί	→ A, 2, ..., K
	→ Καρό	→ A, 2, ..., K
	→ Μπαστούνι	→ A, 2, ..., K

Έστω τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ, Δ, Ε για τα αντίστοιχα ερωτήματα και S ο δ.χ.

α.

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{4\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{1}^3\times\binom{13}{4}}{\binom{52}{5}}.$$

β.

$$P(B) = \frac{\|B\|}{\|S\|} = \frac{2\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{3}\times\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}}.$$

γ.

$$P(\Gamma) = \frac{\|\Gamma\|}{\|S\|} = \frac{2\times\binom{4}{4}\times\binom{4}{1}\times\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}}.$$

δ.

$$P(\Delta) = \frac{\|\Delta\|}{\|S\|} = \frac{10\times\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Άμεση συνέπεια του ε

ε.

$$P(E) = \frac{\|E\|}{\|S\|} = \frac{10\times\left(\binom{4}{1}^5-\binom{4}{1}\right)}{\binom{52}{5}}$$

Επί 10 γιατί βγαίνουν 10 διαφορετικές κέντες, $\binom{4}{1}^5$ γιατί θέλουμε 1 από 4 13φυλλα & 1 από 4 (εκτός) διότι δεν θέλουμε καθαρή κέντα

2) Η τιμή ενός προϊόντος αυξομειώνεται στο χρόνο. Το τελευταίο διάστημα έχει με κάποιο τρόπο εκτιμηθεί ότι όταν η τιμή αλλάζει, αυτή είτε μειώνεται με πιθανότητα 15%, είτε αυξάνεται με πιθανότητα 85%. Ένας αναλυτής προβλέπει ότι η επόμενη κίνηση της τιμής θα είναι καθοδική με σωστή πρόβλεψη 90%, ενώ ένας δεύτερος αναλυτής προβλέπει ότι η επόμενη κίνηση της τιμής θα είναι ανοδική με σωστή πρόβλεψη 70%. Ποιον θα εμπιστευτούμε περισσότερο;

ΛΥΣΗ

Έστω $A = \{\text{να αυξηθεί η τιμή}\}$ & $A^c = \{\text{να μειωθεί η τιμή}\}$

Και τα ενδεχόμενα

$B_1 = \{\text{Ο } 1^{\text{ος}} \text{ αναλυτής αναμένει κάθοδο}\}$ & $B_1^c = \{\text{ο } 1^{\text{ος}} \text{ άνοδο}\}$

& $B_2 = \{\text{Ο } 2^{\text{ος}} \text{ αναλυτής αναμένει άνοδο}\}$ & $B_2^c = \{\text{ο } 2^{\text{ος}} \text{ κάθοδο}\}$

Προφανώς, τα B_1 & B_2 εξαρτώνται από το A & A^c.

$$P(A|B_1 \cap B_2) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(B_1\cap B_2|A)\cdot P(A)}{P(B_1\cap B_2)} =$$

$$= \frac{P(B_1\cap B_2|A)\cdot P(A)}{P(B_1\cap B_2|A)\cdot P(A) + P(B_1\cap B_2|A^c)\cdot P(A^c)} =$$

$$= \frac{P(B_1\cap B_2|A)\cdot P(A)}{P(B_1|A)\cdot P(B_2|A) + P(B_1|A^c)\cdot P(B_2|A^c)} =$$

[Λόγω ανεξαρτησίας των αναλυτών.]

$$= \frac{0.1\cdot 0.7\cdot 0.85}{0.1\cdot 0.7\cdot 0.85 + 0.9\cdot 0.3\cdot 0.15} = 59.5\%$$

(πάνω από τη βάση).

Άρα, πιθανότερο είναι να έχουμε αύξηση αντί για μείωση τιμής

Άρα, θα εμπιστευτούμε περ/ρο τον $2^{\text{ο}}$ αναλυτή

3) Έστω η συνεχής συνάρτηση πιθανότητας, με τύπο

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot cx, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad c > 0$$

α. Να βρεθεί η σταθερά c, καθώς και η αθροιστική $F_X(x)$

β. Να υπολογιστεί η πιθανότητα

i. $P(X > 1)$ με τη χρήση της $f_X(x)$

ii. $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$ με τη χρήση της $F_X(x)$

γ. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(X > \frac{1}{2} \mid X < \frac{3}{2})$ και να εξεταστεί εάν τα ενδεχόμενα $A = \{x > 1\}$ και $B = \{\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$ είναι ανεξάρτητα

δ. Να βρεθούν τα $E(X)$ και $Var(X)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Αφού η f_X σππ τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 \frac{c \cdot x}{2}\,dx = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\cancel{2}} \cdot \frac{4}{\cancel{2}} = 1 \Rightarrow c = 1$$

Άρα, $f_X(x) = \begin{cases} x/2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/4, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Διότι,

$$\begin{cases} x < 0, & \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 0 \\ 0 \leq x \leq 2, & \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt}^{\,0} + \int_0^x f_X(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4} \\ x > 2, & \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt}^{\,0} + \int_0^2 f_X(t)\,dt + \cancel{\int_2^{\infty} f_X(t)\,dt}^{\,0} = \\ & = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = \frac{4}{4} = 1. \end{cases}$$

β. i. $P(X>1)=\int_1^{\infty} f_X(x)\,dx=\int_1^2 f_X(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2=\frac{3}{4}$

ii. $P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})=F_X(\frac{3}{2})-F_X(\frac{1}{2})=\frac{9}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$

γ. $P(X>\frac{1}{2} \mid X<\frac{3}{2})=\frac{P(X>\frac{1}{2} \wedge X<\frac{3}{2})}{P(X<\frac{3}{2})}=\frac{P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})}{P(X<\frac{3}{2})}=$

$=\frac{1/2}{F_X(\frac{3}{2})}=\frac{1/2}{9/16}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$

Τα A, B ανεξάρτητα, εάν $P(A\cap B):=P(A)\cdot P(B)$.

$P(A\cap B)=P(X>1 \wedge \frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2})=P(1<X\le\frac{3}{2})=$

$=F_X(\frac{3}{2})-F_X(1)=\frac{9}{16}-\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$.

Ενώ, $P(A)=P(X>1)=\frac{3}{4}$ & $P(B)=P(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2})\overset{\pi\pi}{=}\frac{1}{2}$

$P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\neq\frac{5}{16}=P(A\cap B)$ όχι Ανεξάρτητα.

δ. $E(X):=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\,dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}\,dx=$

$=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

$Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=\dots=\frac{4}{9}$.

ή

$Var(x):=E((X-E(X))^2)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2\cdot f_X(x)\,dx=$

$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\frac{3}{4})^2\cdot f_X(x)\,dx=$

$=\int_0^2(x-\frac{3}{4})^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\frac{4}{9}$.

4) Η συνάρτηση κατανομής μιας ε.μ. X είναι:

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-2x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

Να βρείτε

α. Την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

β. Την πιθανότητα $P(X>2)$ και την $P(-3<X<4)$

ΛΥΣΗ

α. Η σχέση που συνδέει την πυκνότητα με την συνάρτηση κατανομής είναι η εξής:

$$\frac{d}{dx}F_X(x):=f_X(x)$$

Άρα,
$$\frac{d}{dx}F_X(x)=(1-e^{-2x})'=2\cdot e^{-2x}$$

Επομένως,
$$f_X(x)=\begin{cases} 2\cdot e^{-2x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

β. $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-F_X(2)=1-(1-e^{-4})=e^{-4}$

ή

$$P(X>2):=\int_2^\infty f_X(x)\,dx=\int_2^\infty 2\cdot e^{-2x}\,dx=$$
$$=2\cdot\int_2^\infty e^{-2x}\,dx=2\cdot\left(\left[\frac{1}{2}(-1)\cdot e^{-2x}\right]_2^\infty\right)=$$
$$=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot e^{-4}=e^{-4}.$$

Και

$$P(-3<X<4)\overset{\sigma\tau\eta}{=}F_X(4)-\overbrace{\cancel{F_X(-3)}}^{0}=1-e^{-8}$$

ή

$$P(-3<X<4):=\int_{-3}^{4}f_X(x)\,dx=\overbrace{\cancel{\int_{-3}^{0}f_X(x)\,dx}}^{0}+\int_0^4 f_X(x)\,dx=$$
$$=\int_0^4 2\cdot e^{-2x}\,dx=2\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\right]_0^4=1-e^{-8}.$$

5) Μια βιομηχανία κατασκευάζει μεταλλικά ελάσματα για να αντέχουν σε συγκεκριμένη καταπόνηση. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές παραγωγής κάθε τέτοιο έλασμα αντέχει σε συγκεκριμένη καταπόνηση με πιθανότητα 0.8. Ελέγχουμε στην τύχη 9 τέτοια ελάσματα και τα υποβάλλουμε στη συγκεκριμένη καταπόνηση. Ποια η πιθανότητα να αντέξουν

α) το πολύ 2 ελάσματα, β) περ/ρα από 7 ελάσματα

γ) τουλάχιστον 2 ελάσματα, δ) λιγότερα από 6 και τουλάχιστον 4 ελάσματα;

ΛΥΣΗ

Έχουμε επιλέξει 9 ελάσματα όπου ορίζουμε ως επιτυχία να αντέξει το έλασμα που επιλέξαμε. Επομένως, θεωρούμε X τ.μ που παριστάνει το πλήθος επιτυχιών που έχουμε σε δοκιμές 9 ελασμάτων. Η κάθε (επανάληψη) επιλογή που κάναμε είναι ανεξάρτητη από την άλλη, ενώ η πιθανότητα να αντέξει το έλασμα είναι σταθερή και ίση με 0.8.

Προφανώς, έχουμε διωνυμική κατανομή $X \sim B(n=9, p=0.8)$

Επομένως,

$$p_X(x) = \binom{9}{x} \cdot (0.8)^x \cdot (0.2)^{9-x} \quad , \text{ όπου } q = 1-p = 0.2$$

α) $P(X \leq 2) = P(X=0 \text{ ή } X=1 \text{ ή } X=2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$= p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) =$

$= \binom{9}{0}(0.8)^0 \cdot (0.2)^9 + \binom{9}{1}(0.8)^1 \cdot (0.2)^8 + \binom{9}{2}(0.8)^2 \cdot (0.2)^7 = 0.0003$

β) $P(X>7) = P(X=8 \text{ ή } X=9) = p_X(8) + p_X(9) =$

$= \binom{9}{8} \cdot (0.8)^8 \cdot (0.2)^1 + \binom{9}{9} \cdot (0.8)^9 \cdot (0.2)^0 = 0.4348$

γ) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$

$= 1 - \binom{9}{0}(0.8)^0 (0,2)^9 - \binom{9}{1} \cdot (0,8)^1 \cdot (0,2)^8 = 0,9999$

δ) $P(4 \leq X < 6) = P(X=4) + P(X=5) = \binom{9}{4} \cdot (0,8)^4 \cdot (0,2)^5 + \binom{9}{5} \cdot (0,8)^5 \cdot (0,2)^4$

$= 0.0825$

6) Στο παιχνίδι της ρουλέτας κάποιος μπορεί να ποντάρει σε έναν αριθμό ή και περισσότερους (38 αριθμούς) από τους οποίους κάθε φορά κληρώνεται ο ένας. Ένας παίκτης αποφασίζει να ποντάρει συνεχώς από το 1 έως το 12.

α) P(να χάσει τις 5 πρώτες φορές συμμετοχής του) = ;

β) P(να κερδίσει για $1^{η}$ φορά στην $4^{η}$ συμμετοχή του) = ;

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) <u>Α' τρόπος</u>

Έστω X = πλήθος επιτυχιών και $E = \{$να έλθει από 1 έως 12$\}$

Διωνυμική κατανομή: $X \sim B\left(n=5, \ p=P(E)=\frac{12}{38}\right)$

Άρα, $p_X(x) = \binom{5}{x}\cdot\left(\frac{12}{38}\right)^{x}\cdot\left(1-\frac{12}{38}\right)^{5-x} = \binom{5}{x}\left(\frac{12}{38}\right)^{x}\cdot\left(\frac{26}{38}\right)^{5-x}$

P(να χάσει τις 5 πρώτες φορές) = 1 − P(να κερδίσει εις 5 πρώτες) =

$= 1 - P(X=5) = 1 - p_X(5) = 1 - \binom{5}{5}\left(\frac{12}{38}\right)^{5}\cdot\left(\frac{26}{38}\right)^{5-5} = 1 - \left(\frac{12}{38}\right)^{5}$

<u>Β' τρόπος</u>

P(να χάσει τις 5 πρώτες) = 1 − P(κερδίσει τις 5 πρώτες) =

= 1 − P(κερδ $1^{η}$ και κερδ $2^{η}$ και ... και κερδ $5^{η}$) $\overset{\text{Ανεξάρτητα}}{=}$

= 1 − P(κερδ $1^{η}$) · P(κερδ $2^{η}$) ... P(κερδ $5^{η}$) =

$= 1 - \left(\frac{12}{38}\right)^{5}$ ← Αφού η πιθανότητα αμετάβλητη.

<u>Α' τρόπος</u>

β) Έστω πάλι $E = \{$να έλθει από 1 έως 12$\}$, X = πλήθος επαναλήψεων

Έχουμε n-επαναλήψεις άρα γεωμετρική κατανομή

$X \sim Geo\left(p = P(E) = \frac{12}{38}\right)$ ως την $4^{η}$ φορά

$p_X(x) = p\cdot q^{x-1} =$

$= \frac{12}{38}\cdot\left(\frac{26}{38}\right)^{x-1}$, με X = πλήθος επαναλήψεων ως την $1^{η}$ επιτυχία

Άρα, $p_X(4) = P(X=4) = \frac{12}{38}\cdot\left(\frac{26}{38}\right)^{3} = \frac{12\cdot 26^{3}}{38^{4}}$

<u>Β' τρόπος</u>

P(χάσει $1^{η}$ φορά ∩ ... ∩ χάσει $3^{η}$ φορά ∩ κερδίσει την $4^{η}$ φορά) =

$= P(E^{c})\cdot P(E^{c})\cdot P(E^{c})\cdot P(E) = \frac{12}{38}\cdot\left(\frac{26}{38}\right)^{3}$.

7) Στο Help Desk ενός μεγάλου Internet provider φθάνουν αιτήματα πελατών με ρυθμό 3 αιτ./1 λεπτό. Ποιά η πιθανότητα:
α. σε 1 λεπτό να φθάσουν το πολύ 2 αιτήματα;
β. σε μισό λεπτό να φθάσουν το πολύ 2 αιτήματα;
γ. σε 2 λεπτά να φθάσουν το πολύ 4 αιτήματα;
δ. σε 3 διαφορετικά χρονικά διαστήματα του ενός λεπτού να βρεθούν τουλάχιστον 2 τέτοια αιτήματα σε καθένα από τα οποία να έχουν φθάσει το πολύ 2 αιτήματα;

ΛΥΣΗ

Εστω X τ.μ. που παριστά τον αριθμό των αιτημάτων τα οποία φθάνουν στο help desk σε χρονικό διάστημα t λεπτών. Άρα, η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Poisson (δηλ. $X \sim P(\lambda)$).

α. Εστω μονάδα μέτρησης το 1 λεπτό $\Rightarrow \lambda = 3$.

τότε, ξέρουμε ότι:

$$p_X(x) = \frac{e^{-3} \cdot 3^x}{x!}$$

και θέλουμε:

$$P(X \leq 2) = P(X=0 \text{ ή } X=1 \text{ ή } X=2) =$$
$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$
$$= \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} = 0{,}4232.$$

β. Εστω μονάδα μέτρησης το $\frac{1}{2}$ λεπτού

1 λεπτό → 3 αιτ.
1/2 λεπτού → λ αιτ. $\Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$ αιτ.

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$
$$= \frac{e^{-3/2} \cdot 3^0}{0!} + \frac{e^{-3/2} \cdot 3^1}{1!} + \frac{e^{-3/2} \cdot 3^2}{2!} = 0{,}8088$$

γ. ΟΜΟΙΑ, με $\lambda = 6$ αιτ. $P(X \leq 4) = 0{,}2851$

δ. Τρία χρονικά διαστήματα του 1 λεπτού μπορούν να θεωρηθούν ως τρεις ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα $P(X \leq 2)$ στο 1 λεπτό!
Άρα, έχουμε $Y \sim B(n=3, p(X \leq 2) = 0{,}4232)$
όπου $Y \equiv$ Αριθμός επιτυχιών στις 3 δοκιμές
και τύπος:

$$P(Y=y) = \binom{3}{y} \cdot (0{,}4232)^y \cdot (0{,}5768)^{3-y}$$

$$P(Y \geq 2) = \binom{3}{2} (0{,}4232)^2 \cdot (0{,}5768)^1 + \binom{3}{3} \cdot (0{,}4232)^3 \cdot (0{,}5768)^0 =$$

$$= 0{,}3867.$$

8) Ένας αριθμός X επιλέγεται τυχαίως στο διάστημα [0,2]
Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
α. Το 1ο δεκαδικό ψηφίο του X να διαιρείται με το 3
β. Το 1ο δεκαδικό ψηφίο της 3ης ρίζας του X να είναι το 2

ΛΥΣΗ

Η τυχαία μεταβλητή $X \sim U(0,2)$
και έτσι η συνάρτηση κατανομής θα είναι:

$$F_X(x) = \begin{cases} x<0, & \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0 \\ 0 \leq x \leq 2, & \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(t)dt}^{\,0} + \int_{0}^{x} f(t)dt = \frac{x}{2} \\ x>2, & \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(t)dt}^{\,0} + \int_{0}^{2} f(t)dt + \cancel{\int_{2}^{x} f(t)dt}^{\,0} = 1 \end{cases}$$

όπου,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-0}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & αλλού \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

α. Για να διαιρείται με το 3 το 1ο δεκαδικό ψηφίο του X θα πρέπει να είναι ίσο με 0 ή 3 ή 6 ή 9
Δηλ. έχουμε τις εξής περιπτώσεις:
1η) $0.0 \leq X < 0.1$ ή $1.0 \leq X < 1.1$ ή $X = 2.0$
2η) $0.3 \leq X < 0.4$ ή $1.3 \leq X < 1.4$
3η) $0.6 \leq X < 0.7$ ή $1.6 \leq X < 1.7$
4η) $0.9 \leq X < 1$ ή $1.9 \leq X < 2$

Αντίστοιχα, έχουμε

1η) $P(0.0 \le X < 0.1 \text{ ή } 1.0 \le X < 1.1 \text{ ή } X = 2) =$

$= P(0.0 \le X < 0.1) + P(1.0 \le X < 1.1) + \cancel{P(X=2)}^{\to 0} =$

$= F_X(0.1) - F_X(0.0) + F_X(1.1) - F_X(1.0) =$

$= \frac{0.1}{2} + \frac{1.1}{2} - \frac{0}{2} - \frac{1}{2} = 0.1$

Και λόγω ομοιόμορφα συνεχούς κατανομής και οι πιθανότητες των (2η), (3η), (4η) περιπτώσεων θα είναι ίσες με 0.1
Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα το 1ο δεκαδικό ψηφίο του X να διαιρείται με το 3 είναι ίση με: $0.1+0.1+0.1+0.1=0.4$

β. Ζητάμε την πιθανότητα

$P((0,2 \le \sqrt[3]{X} \le 0,3) \cup (1,2 \le \sqrt[3]{X} < 1,3)) =$

$= P(0,2 \le \sqrt[3]{X} \le 0,3) + P(1,2 \le \sqrt[3]{X} < 1,3) =$

$= P(0,008 \le X \le 0,027) + P(1,728 \le X < 2,197) =$

$= F_X(0,027) - F_X(0,008) + F_X(2,197) - F_X(1,728) =$

$= 0,1455.$

9) Έστω X η διάρκεια ζωής του ανθρώπου που επιλέχθηκε για αυτό το τυχαίο πείραμα. Η X μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1/75$. Να βρεθεί η πιθανότητα ο άνθρωπος αυτός να ζήσει:

α) Το πολύ μια εβδομηνταετία, β) Ακριβώς μια εβδομηνταετία

γ) Τουλάχιστον μια εβδομηνταετία

δ) πάνω από μια εβδομηνταετία αν είναι γνωστό ότι είναι πάνω από 30)

Επιπλέον, να βρεθούν η αναμενόμενη τιμή & διακύμανση του δείγματος

ΛΥΣΗ

Έχουμε $X \sim \text{Εκθ}(\lambda = \frac{1}{75})$, 1 μέσος άνθρωπος ζει 75 χρόνια

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \quad \& \quad F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Εστω μονάδα μετρησης τα 70 χρόνια

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ ανθρ.} \rightarrow 75 \text{ χρονια} \\ \lambda \text{ ανθρ} \rightarrow 70 \text{ χρόνια} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{70}{75}$$

α) $P(X \leq 70) = F_X(70) = 1 - e^{70/75} = 0{,}61$

β) $P(X = 70) = 0$

γ) $P(X \geq 70) = 1 - P(X < 70) \overset{\text{συνεχ}}{=} e^{70/75}$

Αμνησία.

δ) $P(X > 70 \mid X > 30) = P(X > 40 + 30 \mid X > 30) = P(X > 40) = e^{-40/75} = 0{,}59$

Τελος, $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 75$ χρονια ← $\boxed{\text{Ποσυανει κρου ο μεσος ανθρωπος του δειγματος ζει μεχρι και 75 χρ}}$

Ενώ, $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 75^2 = 5625$

10) Ο ρυθμός των απεργιων σε μια χωρα είναι 4 απεργίες καθε 3 χρονια

α) Ποια η πιθανοτητα να μην συμβει καμια απεργια στον 1ο χρόνο;

β) Ποια η πιθανοτητα να γίνουν τουλάχιστον 3 απεργίες στον 1ο χρόνο;

γ) Ποια η πιθανοτητα δεδομένου ότι έχουν περασει 2 χρόνια δίχως απεργία να περάσει ακόμα ένα τριμηνο.

ΛΥΣΗ

α,β) Εστω μονάδα χρόνου ο 1 χρόνος

Εστω X πλήθος απεργιών στον 1 χρόνο $(X \sim P(\lambda))$

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ απεργίες στα } 3 \text{ χρόνια} \\ \lambda \text{ απεργίες στον } 1 \text{ χρόνο} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

$P(X = 0) = p_X(0) = \frac{e^{-4/3} \cdot (4/3)^0}{0!} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^4}}$

&

$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$

$$= 1 - \frac{e^{-4/3}\cdot(4/3)^0}{0!} - \frac{e^{-4/3}\cdot(4/3)^1}{1!} - \frac{e^{-4/3}\cdot(4/3)^2}{2!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e^4}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{e^4}} - \frac{8}{9\sqrt[3]{e^4}} = \frac{9\sqrt[3]{e^4} - 9 - 3 - 8}{9\sqrt[3]{e^4}} = \frac{9\sqrt[3]{e^4} - 20}{9\sqrt[3]{e^4}}.$$

γ) Άρα, έχουμε ένα διάστημα $[2,3]$ και αναζητούμε την απεργία που θα συμβεί σε αυτό. Έχουμε, δηλ. εκθετική κατανομή με $Y \sim Εκθ(\lambda_1)$ με Y ο χρόνος μεταξύ 2 απεργιών σε έτη

4 απεργ 3 χρόνια

λ_1 απεργ 2 χρόνια $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{8}{3}$

$$P(Y>2,3 \mid Y>2) \underset{\text{αμνησία}}{=} P(Y>0,3) = 1 - P(Y \le 0,3) = 1 - F_Y(0,3)$$
$$= e^{-8/3 \cdot 0,3}$$

---

11) Η επίδοση των φοιτητών σε ένα μάθημα περιγράφεται από την Κανονική κατανομή $N(5,1)$

α. Να υπολογισθεί η πιθανότητα η επίδοση ενός φοιτητή να είναι μεταξύ 4 & 6.

β. Αν είναι γνωστό ότι η επίδοση του φοιτητή είναι μεγαλύτερη από 5, ποια η πιθανότητα να είναι μεγαλύτερη του 6;

γ. Ποια τουλάχιστον επίδοση περιμένουμε να πραγματοποιηθεί με πιθανότητα 0,9;

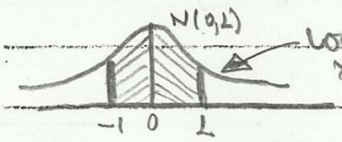
ΛΥΣΗ

Αν X η επίδοση τότε $X \sim N(5,1)$ και ψάχνουμε:

$$P(4 \le X \le 6) = P\left(\frac{4-5}{1} \le Z \le \frac{6-4}{1}\right) = P(-1 \le Z \le 1), \quad Z = \frac{X-5}{1}$$

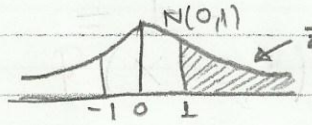
Άρα, τώρα που την τυποποιήσαμε, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$P(-1 \le Z \le 1) = P(0 \le Z \le 1) + P(-1 \le Z \le 0) =$$
$$= 2 \cdot P(0 \le Z \le 1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$$



β) $P(X>6 \,/\, X>5) = \dfrac{P(X>6)}{P(X>5)}$ $\circledast$

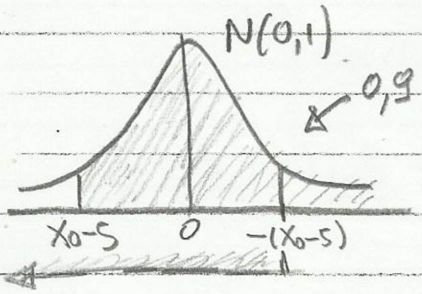
$$P(x>6) = P\left(\frac{x-5}{1} > \frac{6-5}{1}\right) = P(z>1) = P(z>0) - P(0<z<1) =$$
$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$



$$P(x>5) = P\left(\frac{x-5}{1} > \frac{5-5}{1}\right) = P(z>0) = 0.5$$

Άρα, ⊛ $\rightsquigarrow$ $P(x>5 \mid x>6) = \dfrac{0.1587}{0.5} = 0{,}3174$

γ) Έστω x_0 η επίδοση που ψάχνουμε
δηλαδή $P(x \geq x_0) = 0.9$
Με τυποποίηση της κατανομής, παίρνουμε:
$$P(x-5 \geq x_0-5) = P(z \geq x_0-5) = 0.9 > 0.5$$



$$P(z \geq x_0-5) \overset{\text{ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ}}{=} P(z < -(x_0-5)) =$$
$$= P(z<0) + P(0<z<-(x_0-5)) =$$
$$= 0.5 + P(0<z<-(x_0-5)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0.9 = 0.5 + P(0<z<-(x_0-5)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(0<z<-(x_0-5)) = 0.4$$

Δηλ. $-(x_0-5) \simeq 1.28 \Rightarrow x_0 \simeq 3.72$

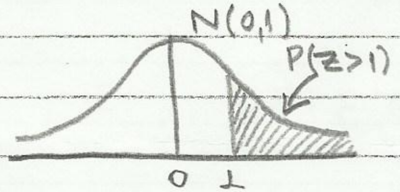
12) Ένα διαγνωστικό μηχάνημα κατασκευάζεται έτσι ώστε οι ασθενείς να μπορούν να εισέρχονται σε ένα θάλαμο όπου θα πραγματοποιούνται διάφορες αιματολογικές εξετάσεις. Ο θάλαμος έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε να είναι 185 εκατοστά ύψος. Όμως, το ύψος των ανδρών στην Ελλάδα ακολουθεί μια κανονική κατανομή όπου $\mu = 178$ εκατοστά και $\sigma = 7$

1. Ποιά η πιθανότητα ο άνδρας να μην χωράει στο θάλαμο;
2. Σε μια μέρα επισκέπτονται το διαγνωστικό κέντρο 6 άνδρες. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον ένας να μην χωράει στο θάλαμο;

ΛΥΣΗ

1. Ψάχνουμε την πιθανότητα
$P(X>185)$ όπου X το ύψος των ανδρών

$$P(X>185) = P\left(\frac{X-178}{7} > \frac{185-178}{7} = 1\right) = P(Z>1) =$$



$$= P(Z>0) - P(0<Z<1) =$$
$$= 0,5 - 0,3413 = 0,1587$$

2. Έχουμε Y παριστά το πλήθος των ανδρών από τους έξι ανδρες το οποίο δεν χωράει στο θάλαμο
Άρα, $Y \sim B(\nu=6, p=0,1587)$
και σ.π.:

$$f_Y(y) = \binom{6}{y} \cdot (0,1587)^y \cdot (1-0,1587)^{1-y}$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) = 1 - f_Y(0) =$$

$$= 1 - \binom{6}{0} (0,1587)^0 \cdot (1-0,1587)^1 =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + 0,1587 = 0,1587.$$